



ce
pre
UNI

Trigonometría

LUGAR GEOMÉTRICO:
✓ **LA CIRCUNFERENCIA**

CICLO
PRE 2024 - I



2

NOCIONES PREVIAS

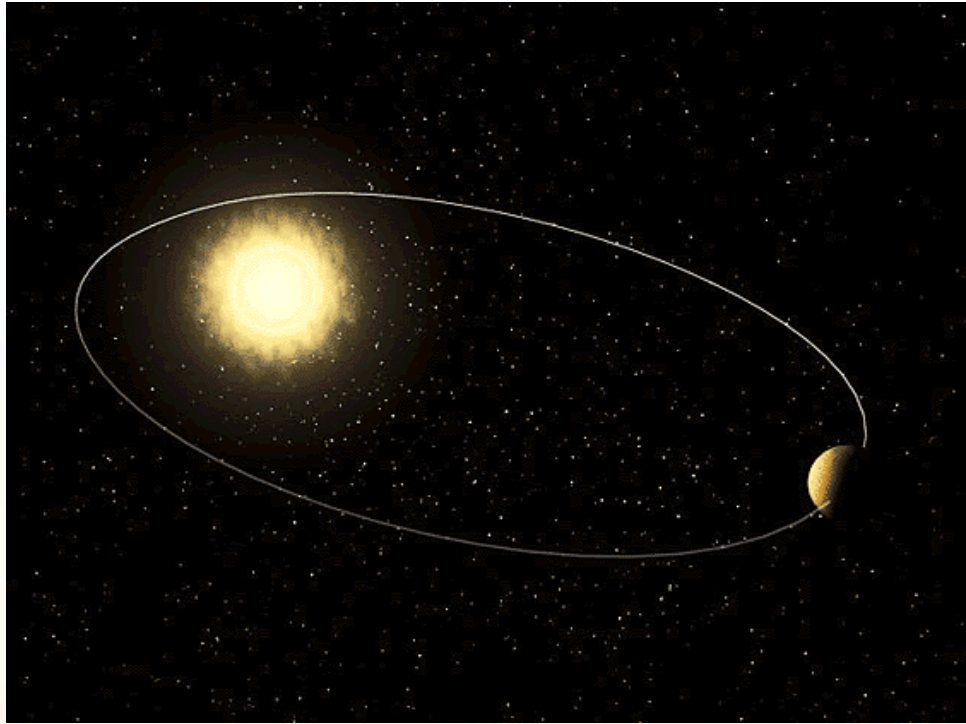
Para comprender la naturaleza, la mente humana depende en gran medida de su percepción de las figuras y modelos. Muchas de las creaciones humanas, o elementos de la naturaleza, con frecuencia se pueden caracterizar en términos de una forma geométrica.

Algunas de las ideas y términos de la Geometría se han convertido en parte del lenguaje cotidiano. Aunque los objetos reales jamás concuerdan exactamente con una figura geométrica, sí se aproximan, de modo que lo que se sabe sobre las figuras y relaciones geométricas se puede aplicar a los objetos.

Los lugares geométricos se pueden representar a través de expresiones algebraicas que describen su comportamiento. La interpretación matemática de las figuras también incluye la descripción gráfica de las relaciones numéricas y simbólicas.

Ejemplos:

Órbitas de planetas



Antena parabólica



LUGAR GEOMÉTRICO

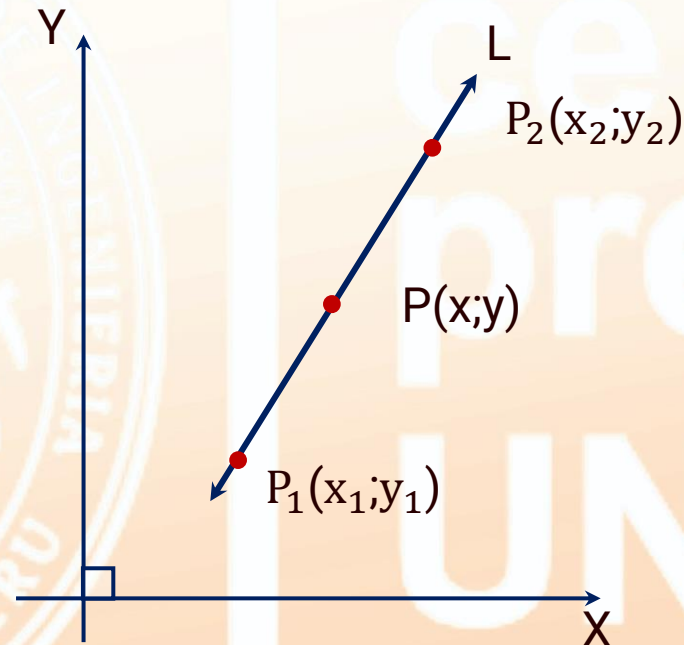
DEFINICIÓN

Es aquel conjunto de puntos $P(x; y)$ del plano que cumplen con una misma propiedad o condición geométrica. Dicha condición es representada mediante una ecuación de la forma: $E(x; y) = 0$.

EJEMPLOS:

La Recta numérica: es el lugar geométrico de los puntos tales que elegidos dos puntos diferentes cualesquiera $P_1(x_1; y_1)$ y $P_2(x_2; y_2)$ de dicha recta, el valor de la pendiente m , resulta siempre constante, siendo:

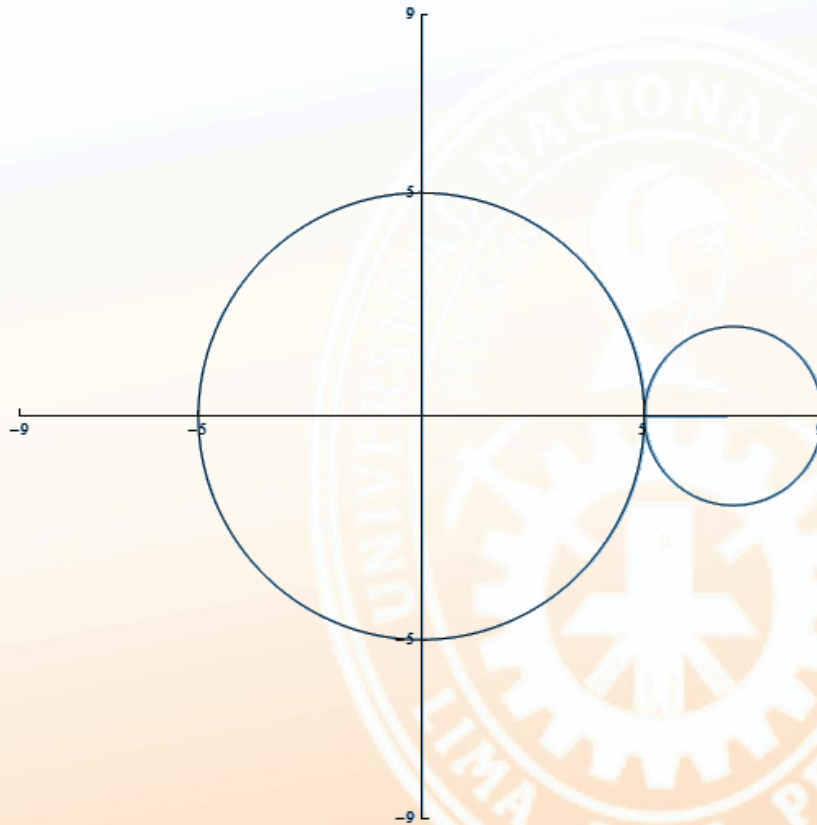
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, x_2 \neq x_1$$



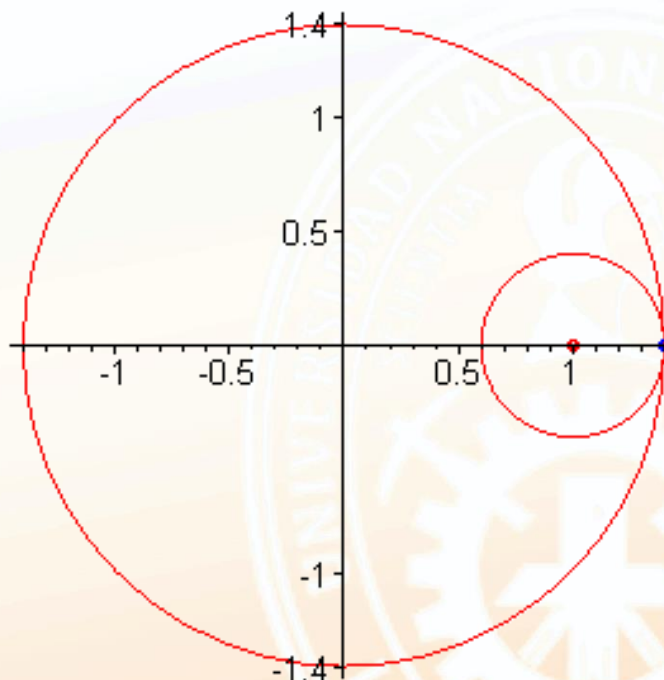


La **Cicloide**, es la curva descrita por la trayectoria de un punto de una circunferencia que rueda sin deslizar sobre una recta.

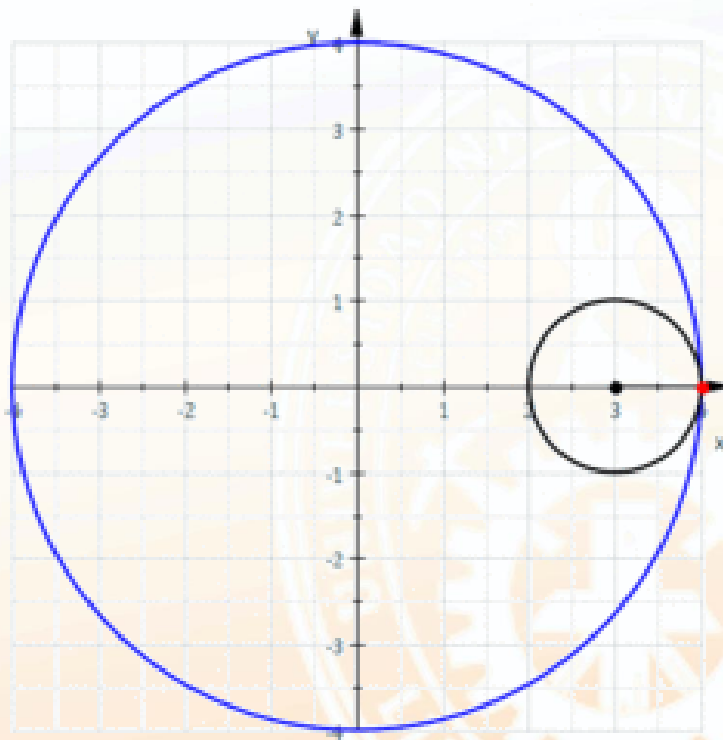
La **Epicicloide** es la curva que describe la trayectoria de un punto de una circunferencia generatriz que rueda, sin deslizar, sobre el exterior de una circunferencia directriz.



Una **Hipocicloide** es la curva que describe la trayectoria de un punto de una circunferencia que rueda, sin deslizar, por el interior de una circunferencia directriz.

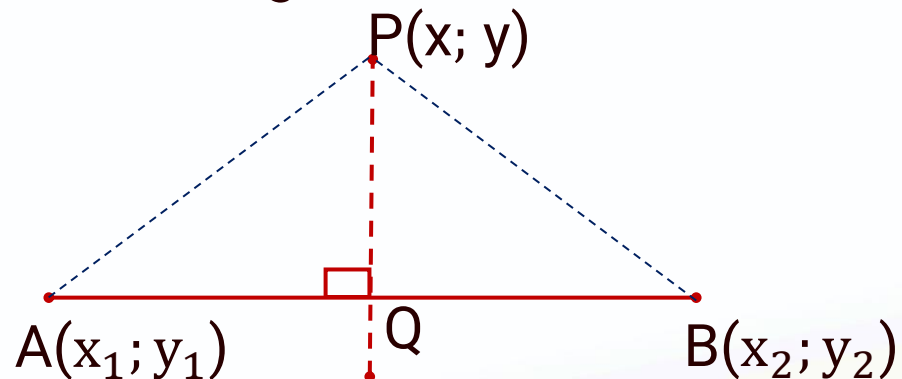


El **Astroide** es un tipo particular de hipocicloide, una curva con cuatro vértices. Todos los astroides son versiones escaladas de la curva que tiene por ecuación $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.



LA MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO

Es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los extremos de un segmento dado.

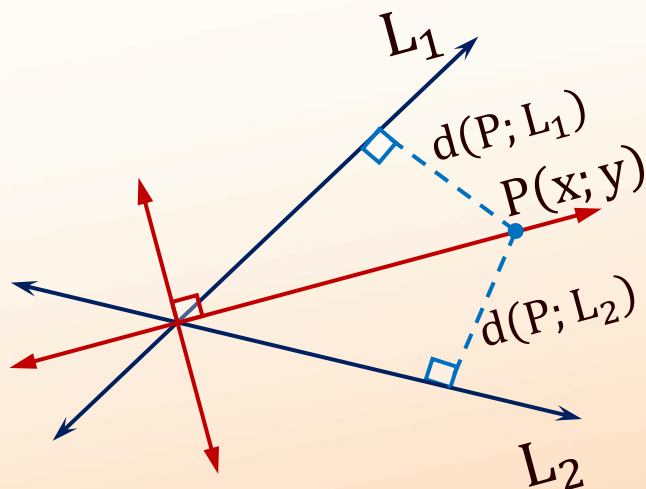


Ecuación de la mediatriz

$$d(P; A) = d(P; B)$$

LA BISECTRIZ DE UN ÁNGULO

Es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de las rectas que forman el ángulo



Ecuación de la bisectriz

$$d(P; L_1) = d(P; L_2)$$

PROBLEMA 01:

Desde el punto $A(-12;13)$ se han trazado todos los rayos posibles hasta su intersección con el eje de ordenadas. Determine la ecuación del lugar geométrico de sus puntos medios.

A) $x - y + 3 = 0$

B) $x + y - 6 = 0$

C) $2x - 3y + 6 = 0$

D) $3x - 2y + 12 = 0$

E) $x - 6 = 0$

CLAVE: E

PROBLEMA 02:

Determine la ecuación de las bisectrices de los ángulos formados por las rectas $L_1: 5x - 3y = 0$ y $L_2: 3x - 5y = 0$

A) $x + y = 0$ $\vee$ $x - y = 0$

B) $2x + y = 0$ $\vee$ $x - 2y = 0$

C) $3x + y = 0$ $\vee$ $x - 3y = 0$

D) $4x + y = 0$ $\vee$ $x - 4y = 0$

E) $5x + y = 0$ $\vee$ $x - 5y = 0$

CLAVE: A

PROBLEMA 03:

Determine la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano, $P(x; y)$, tales que la suma de los cuadrados de sus distancias al origen y al punto $A(1; 2)$ es 25.

$$A) \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = \frac{45}{4}$$

$$B) \frac{(x + 1)^2}{2} + (y + 1)^2 = \frac{55}{4}$$

$$C) \frac{(x - 1)^2}{2} + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

$$D) \frac{(x - 1)^2}{2} + \frac{(y - 1)^2}{2} = \frac{15}{4}$$

$$E) \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y + 1)^2 = \frac{35}{4}$$

CLAVE: A

PROBLEMA 04:

Un segmento rectilíneo de longitud $(a + b)u$ se mueve resbalando con sus extremos sobre los ejes coordenados. Determine la ecuación del lugar geométrico de un punto P, sobre el segmento, que se encuentra a unidades de distancia de uno de sus extremos.

A) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

B) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

C) $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

D) $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

E) $\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$

CLAVE: A

PROBLEMA 05: (Problema 207 del material de estudio 2)

Determine el lugar geométrico de todos los puntos $P(x; y)$ tal que sus distancias a la recta $L_1: x - y + 1 = 0$ y a la recta $L_2: x + y + 1 = 0$, satisface que $\frac{d(P, L_1)}{d(P, L_2)} = \frac{2}{3} \cdot d(P, L) \rightarrow$ distancia del punto P a la recta L .

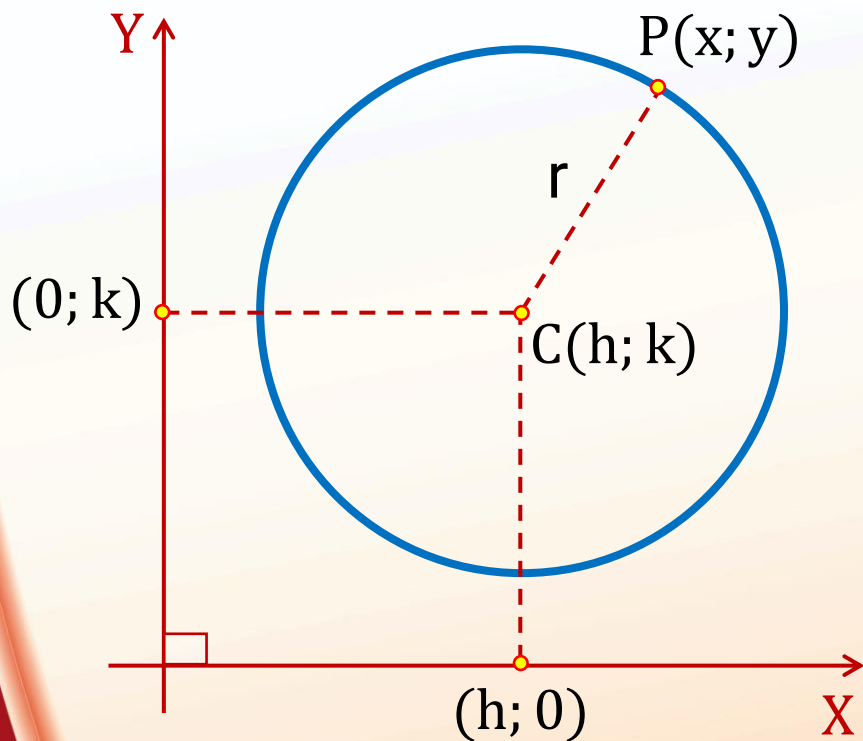
- A) $5x^2 - 26xy + 5y^2 + 10x - 26y + 5 = 0$
- B) $3x^2 - 7xy + 2y^2 + 6x - 4y + 5 = 0$
- C) $5x^2 + 26xy + 5y^2 - 10x - y + 2 = 0$
- D) $3x^2 + 7xy + 2y^2 + 2x - y + 3 = 0$
- E) $5x^2 - 16xy + 5y^2 + 8x - 18y + 6 = 0$

CLAVE: A

LA CIRCUNFERENCIA

DEFINICIÓN

La **circunferencia** es el lugar geométrico de los puntos $P(x;y)$ tales que la distancia a cada uno de ellos desde un punto fijo del plano es una constante positiva. El punto fijo y la distancia dada se les denomina centro y longitud del radio respectivamente



Ecuación de la circunferencia

Por distancia entre los puntos P y C:

$$r = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2}$$

Elevando al cuadrado obtenemos la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto $(h; k)$ y cuyo radio es de longitud r :

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

(Forma ordinaria)

PROBLEMA 06: (UNI 1996 II)

Determine la ecuación ordinaria de la circunferencia con centro en $(2; 2)$ y la longitud de su radio es R .

A) $(x - 8)^2 + (y - 2)^2 = R^2$

B) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = R^2$

C) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = R^2$

D) $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = R^2$

E) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = R^2$

CLAVE: D

PROBLEMA 07: (Problema 215 del material de estudio 2)

Una circunferencia tiene su centro en la intersección de la recta $y = x - 10$ con el eje X y además la circunferencia es tangente a la recta $y = x - 14$. Determine la ecuación ordinaria de la circunferencia.

A) $x^2 + y^2 = 1$

B) $(x + 10)^2 + y^2 = 4$

C) $(x - 10)^2 + y^2 = 8$

D) $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 4$

E) $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 8$

CLAVE: C

**PROBLEMA 08: UNI 2019-II**

Si un diámetro de la circunferencia: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ tiene como extremos a los puntos $(2; 2)$ y $(6; 5)$, entonces calcule el valor de

$$h + \frac{k}{4} + \frac{r^2}{2}$$

A) 7

B) 8

C) 9

D) 10

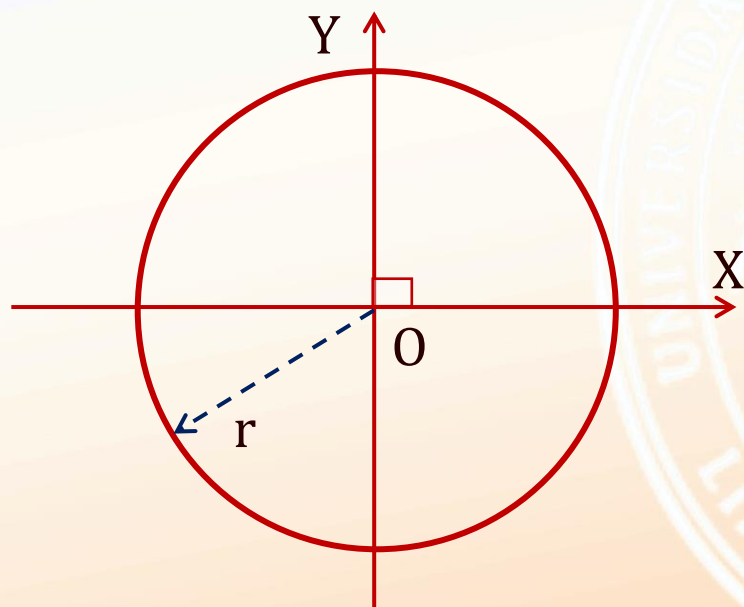
E) 11

CLAVE: B

Forma canónica de la ecuación de una circunferencia.

Cuando el centro de la circunferencia es el punto de coordenadas (0;0), es decir el origen de coordenadas, se obtiene la ecuación:

$$x^2 + y^2 = r^2$$



(0; 0): Centro

r: Longitud del radio

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = r^2$$

$$\therefore x^2 + y^2 = r^2$$

PROBLEMA 09: UNI 2011-II

¿Cuál es la ecuación de la circunferencia cuyo centro está sobre la recta $y + x = 0$. Además, pasa por los puntos $(3; 4)$ y $(3\sqrt{2}; \sqrt{7})$?

A) $x^2 + y^2 = 5$

B) $x^2 + y^2 = 9$

C) $x^2 + y^2 = 15$

D) $x^2 + y^2 = 16$

E) $x^2 + y^2 = 25$

CLAVE: E

PROBLEMA 10:

Una recta de pendiente positiva pasa por el punto $D(-4;0)$ y determina en la circunferencia, cuya ecuación es $x^2 + y^2 = 16$, una cuerda de $6,4u$ de longitud. Determine la ecuación de la recta.

A) $3x - 4y - 12 = 0$

B) $3x - 4y + 12 = 0$

C) $4x - 3y + 12 = 0$

D) $4x + 3y + 12 = 0$

E) $4x - 3y - 12 = 0$

CLAVE: Bpre
UNI

Ecuación general de una circunferencia.

Al desarrollar la ecuación ordinaria tenemos:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 = r^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + \underbrace{-2hx}_{Dx} + \underbrace{-2ky}_{Ey} + \underbrace{h^2 + k^2 - r^2}_F = 0$$

Obtenemos:

$$\mathbf{x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

PROBLEMA 11:

Determine la ecuación general de la circunferencia cuyo centro tiene por coordenadas $(7; -5)$ y su radio mide $3u$.

A) $x^2 + y^2 - 14x - 10y + 65 = 0$

B) $x^2 + y^2 - 14x + 10y - 65 = 0$

C) $x^2 + y^2 - 14x + 10y + 65 = 0$

D) $x^2 + y^2 + 14x + 10y + 65 = 0$

E) $x^2 + y^2 + 14x + 10y - 65 = 0$

CLAVE: C

PROBLEMA 12: (Problema 216 del material de estudio 2)

Una circunferencia es tangente al eje de las abscisas en el punto (4; 0) y pasa por el punto (1; 1). Determine la ecuación general de la circunferencia.

A) $x^2 + y^2 + 10x + 8y + 16 = 0$

B) $x^2 + y^2 - 8x + 10y + 16 = 0$

C) $x^2 + y^2 + 8x - 10y + 16 = 0$

D) $x^2 + y^2 - 10x - 8y + 16 = 0$

E) $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 16 = 0$

CLAVE: E

ANÁLISIS DE LA ECUACIÓN GENERAL DE UNA CIRCUNFERENCIA

Consideremos la ecuación: $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

Completando cuadrados: $x^2 + Dx + \frac{D^2}{4} + y^2 + Ey + \frac{E^2}{4} + F = \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4}$

Luego:
$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}$$

Se presentan los siguientes casos:

- i) Si: $D^2 + E^2 - 4F < 0 \rightarrow$ No tiene gráfico.
- ii) Si: $D^2 + E^2 - 4F = 0 \rightarrow$ Representa el punto: $\left(-\frac{D}{2}; -\frac{E}{2}\right)$
- iii) Si: $D^2 + E^2 - 4F > 0 \rightarrow$ Representa la circunferencia de centro en:

$$(h; k) = \left(-\frac{D}{2}; -\frac{E}{2}\right) \text{ y la longitud de su radio es: } \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2}$$

PROBLEMA 13 (Problema 210 del material de estudio 2)

La ecuación $x^2 + y^2 - 8x + 10y + k = 0$, representa a una circunferencia de radio $4u$. Calcule el valor de k .

- A) 5 B) 10 C) 15 D) 20 E) 25

CLAVE: E**PROBLEMA 14 (Problema 211 del material de estudio 2)**

Sea la circunferencia $C: 16x^2 + 16y^2 + 48x - 8y - 43 = 0$ y la recta $L: 8x - 4y + 73 = 0$. Calcule la distancia del punto más cercano de la circunferencia a la recta (en u).

- A) $\sqrt{5}$ B) $2\sqrt{5}$ C) $3\sqrt{5}$ D) $4\sqrt{5}$ E) $5\sqrt{5}$

CLAVE: B

Determinación de la ecuación de una circunferencia conociendo las coordenadas de tres puntos.

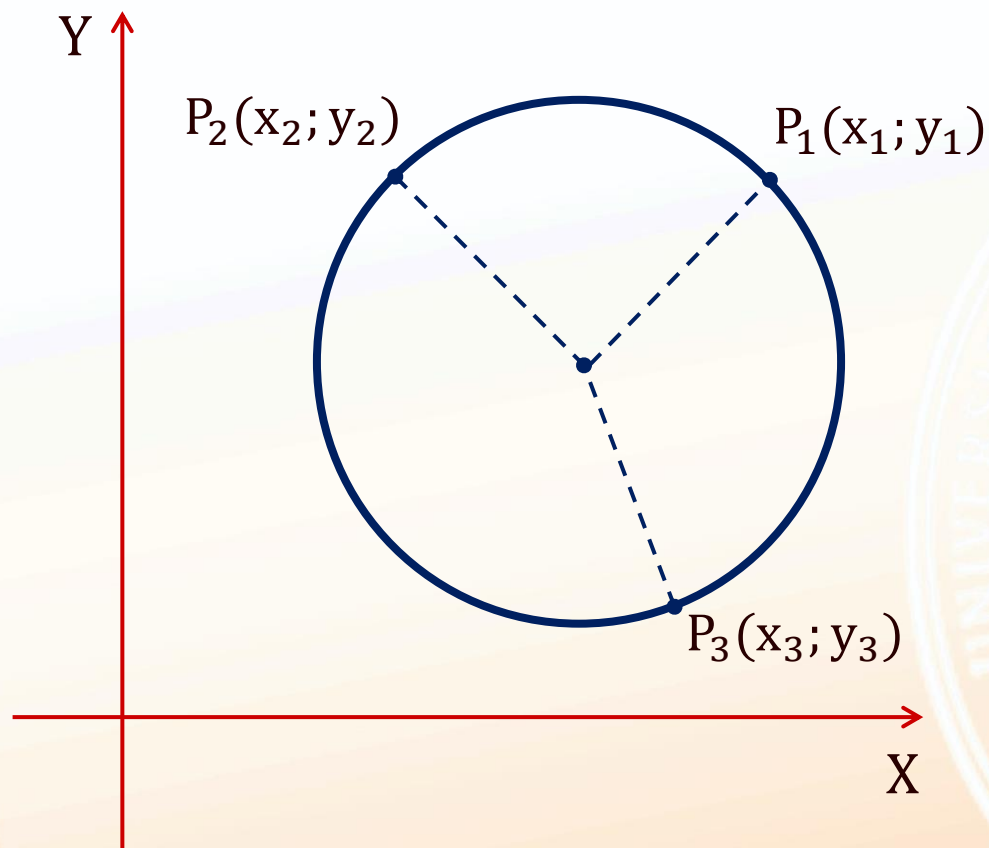
Para una circunferencia que pasa por los puntos $P_1(x_1; y_1)$, $P_2(x_2; y_2)$ y $P_3(x_3; y_3)$, consideremos la ecuación general de la circunferencia:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Donde para determinar la ecuación de la circunferencia debemos calcular los valores de las constantes D , E y F .

Entonces como los puntos $P_1(x_1; y_1)$, $P_2(x_2; y_2)$ y $P_3(x_3; y_3)$ pertenecen a la circunferencia, estos deben verificar la ecuación de la misma.

Reemplazando en la ecuación tenemos:



$$x_1^2 + y_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F = 0$$

$$x_2^2 + y_2^2 + Dx_2 + Ey_2 + F = 0$$

$$x_3^2 + y_3^2 + Dx_3 + Ey_3 + F = 0$$

Resolviendo el sistema calculamos D, E y F, con ello obtenemos la ecuación general de la circunferencia.

PROBLEMA 15

Dada la circunferencia de centro $(h; k)$ y radio r , que pasa por los puntos $(9; 9)$, $(0; 6)$ y $(5; 1)$. Calcule el valor de: $h + k + r$.

- A) 12 B) 14 C) 16 D) 18 E) 20

CLAVE: C**PROBLEMA 16: UNI 1999-II**

Si $C_1: x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ es la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(3; 0)$, $(1; 0)$, $(0; 1)$, calcule el valor de $4D - 4E + F$

- A) 3 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

CLAVE: A

PROBLEMA 17

La ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $M(2\pi; 2\sqrt{2})$, $O(0, ; 0)$ y $N(\pi + \sqrt{2}; \pi + \sqrt{2})$ es de la forma $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$.

Calcule el valor de $\frac{h^2 + k^2}{r}$.

A) 1

B) π^2

C) $\pi^2 + 2$

D) $\sqrt{\pi^2 + 2}$

E) $\sqrt{\pi + 2}$

CLAVE: D

RECTA TANGENTE A LA CIRCUNFERENCIA

POSICIÓN RELATIVA ENTRE RECTA Y CIRCUNFERENCIA EN EL PLANO

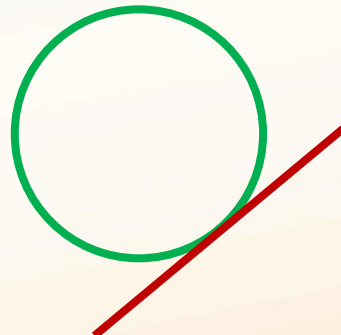
Dadas las ecuaciones de la circunferencia C y la recta L:

$$C: (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2, \quad L: y = mx + n$$

Al reemplazar la ecuación de L en C, obtenemos la ecuación cuadrática de la forma: $ax^2 + bx + c = 0$, cuyo discriminante es $\Delta = b^2 - 4ac$

Se presentan los siguientes casos:

Recta tangente a la circunferencia



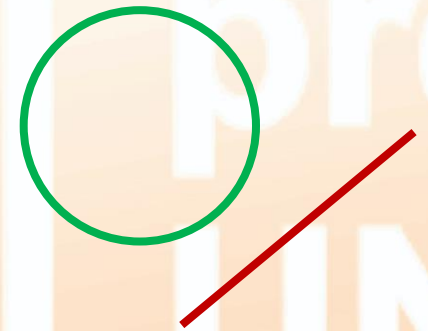
$$\Delta = 0$$

Recta secante a la circunferencia



$$\Delta > 0$$

Recta no común a la circunferencia



$$\Delta < 0$$

PROBLEMA 18: UNI 2022-II

Dada la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. Para cual de los siguientes valores de a positivo, la recta $L: x + 2y = a$, es tangente a dicha circunferencia.

- A) 1 B) $\sqrt{3}$ C) 2 D) 2 E) $\sqrt{5}$

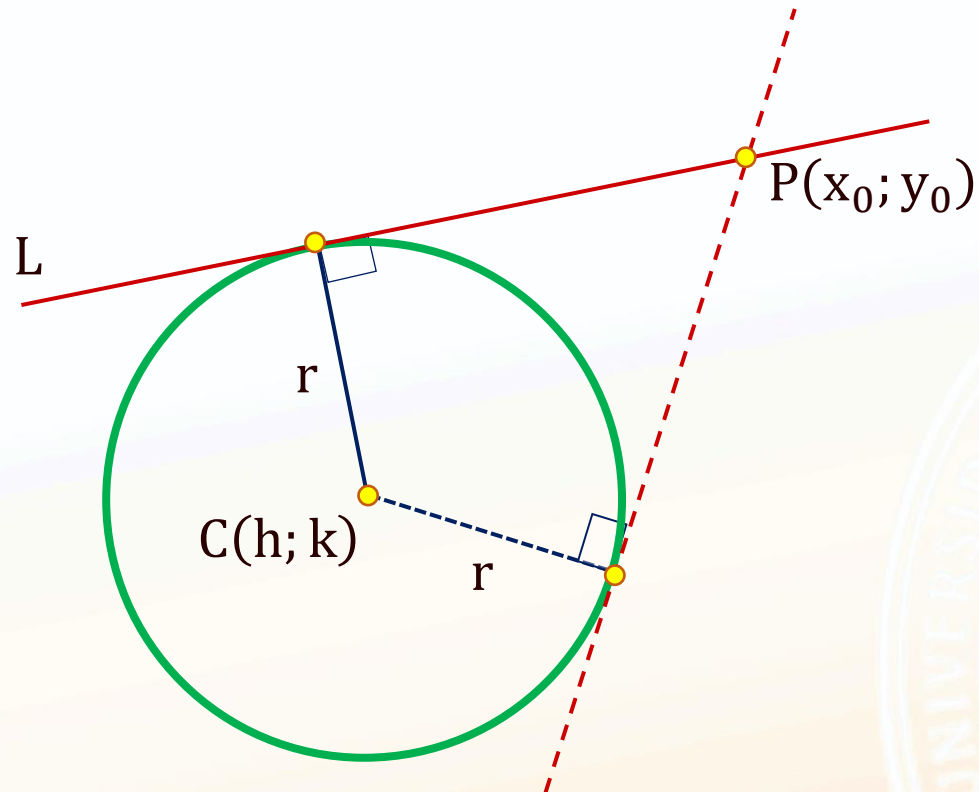
CLAVE: E**PROBLEMA 19: UNI 2022-II**

Calcule la pendiente de la recta que pasa por el origen de coordenadas y es tangente a la circunferencia cuya ecuación es $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$

- A) $1/7$ B) $\sqrt{3}$ C) 2 D) $5/12$ E) $\sqrt{5}/3$

CLAVE: D

CASO 1: SE CONOCE UN PUNTO DE PASO DE LA RECTA TANGENTE Y LA ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA



Se conoce $P(x_0; y_0)$ además de $C(h; k)$ y r , entonces debemos calcular la pendiente m , de la recta tangente.

Sea $L: (y - y_0) = m(x - x_0)$

$$L: mx - y + (y_0 - mx_0) = 0$$

Planteamos: $d(C; L) = r$, despejando m :

$$\Rightarrow \frac{|mh - k + y_0 - mx_0|}{\sqrt{m^2 + 1}} = r$$

PROBLEMA 20:

Determine la ecuación de la recta tangente trazada desde el punto $(1; 2)$ a la circunferencia de ecuación:

$x^2 + y^2 - 14x - 12y = -69$
que tenga pendiente positiva.

A) $9x - 8y + 7 = 0$

B) $9x - 7y + 5 = 0$

C) $10x - 6y + 2 = 0$

D) $11x - 5y - 1 = 0$

E) $12x - 5y - 2 = 0$

CLAVE: E

PROBLEMA 21: (Problema 219 del material de estudio 2)

Sea la ecuación de una circunferencia

$C: (x - 1)^2 + (y + 7)^2 = 25$, si se trazan las rectas tangentes a C desde el punto $(7; 1)$, calcule la suma de las pendientes de las rectas tangentes.

A) $\frac{96}{11}$

B) $\frac{97}{11}$

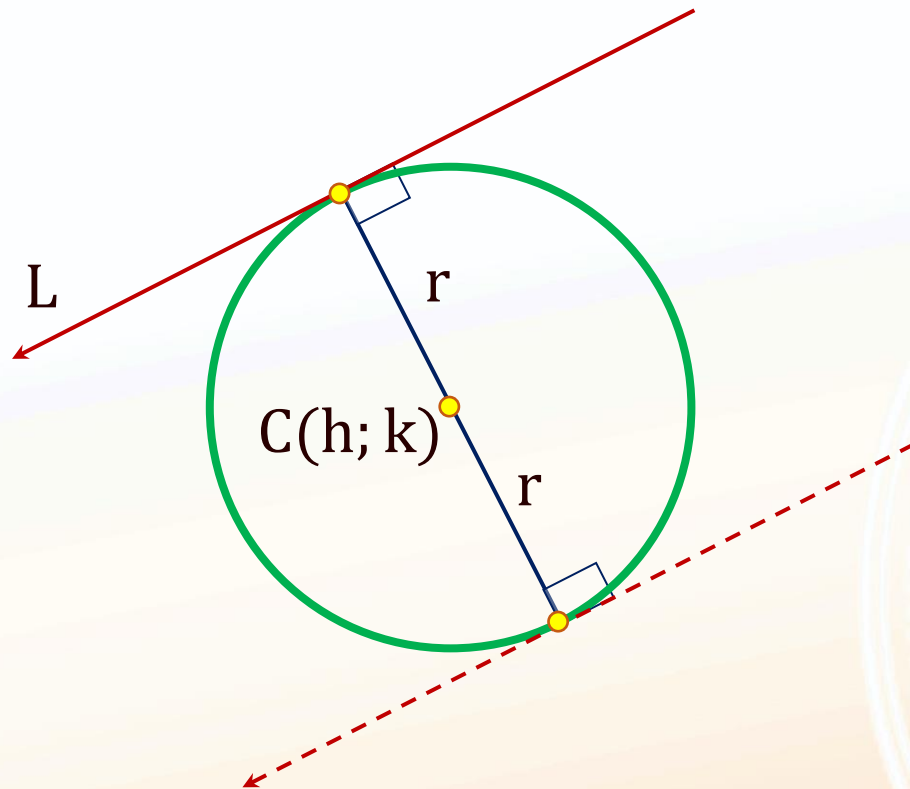
C) $\frac{98}{11}$

D) 9

E) $\frac{100}{11}$

CLAVE: A

CASO 2: SE CONOCE LA PENDIENTE DE LA RECTA TANGENTE Y LA ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA



Sea $L: y = mx + b$

$$\Rightarrow L: mx - y + b = 0$$

Se conoce m pero no b .

Planteamos: $d(C; L) = r$

$$\Rightarrow \frac{|mh - k + b|}{\sqrt{m^2 + 1}} = r$$

$$\Rightarrow mh - k + b = \pm r\sqrt{m^2 + 1}$$

$$\therefore b = k - mh \pm r\sqrt{m^2 + 1}$$

PROBLEMA 22:

Determine un valor de p para que la recta: $L : 3x - 2y + p = 0$
sea tangente a la circunferencia $C: x^2 + y^2 - 4x + 6y - 39 = 0$

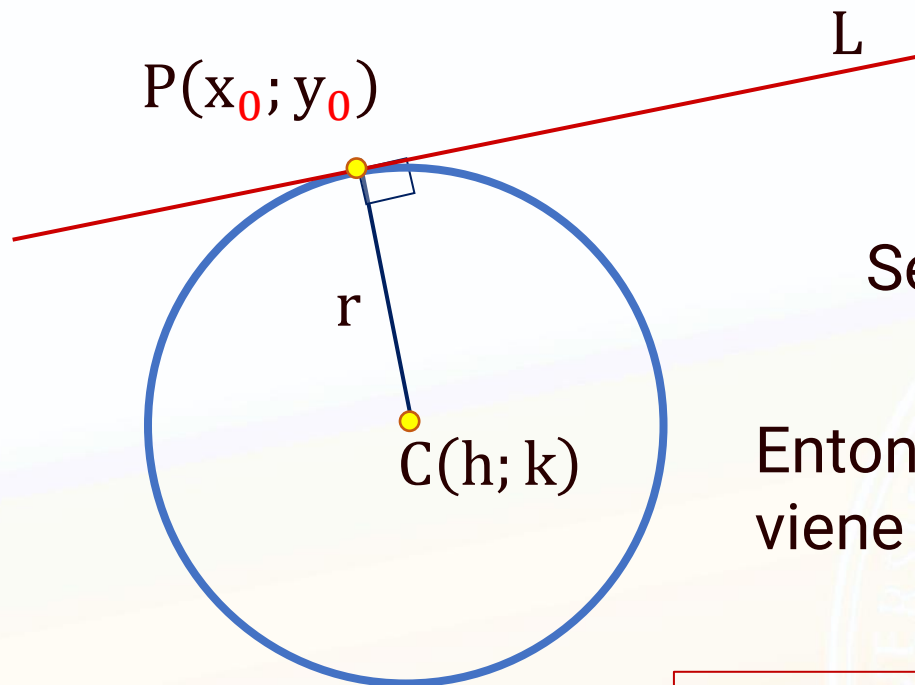
A) 16

B) -26

C) 18

D) -32 E) -38 **CLAVE: E**

CASO 3: SE CONOCE EL PUNTO DE TANGENCIA Y LA ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA



Sea $C: x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

Entonces la ecuación de la recta tangente viene dada por:

$$L: x \cdot x_0 + y \cdot y_0 + D \left(\frac{x + x_0}{2} \right) + E \left(\frac{y + y_0}{2} \right) + F = 0$$

PROBLEMA 23:

Determine la ecuación de la recta tangente a la circunferencia de ecuación:
 $C: x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 = 0$, en el punto de tangencia $(6; 8)$.

A) $4x + 3y - 48 = 0$

B) $4x + 2y - 40 = 0$

C) $4x + y - 32 = 0$

D) $4x - y - 16 = 0$

E) $4x - 2y - 8 = 0$

CLAVE: A